Olympiadeklassen **11–12**

64. Mathematik-Olympiade
1. Runde (Schulrunde)
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

641211

Man untersuche, ob es fünf ganze Zahlen a, b, c, d und e gibt, für die die Bedingung

$$0 < a < b < c < d < e < 10$$

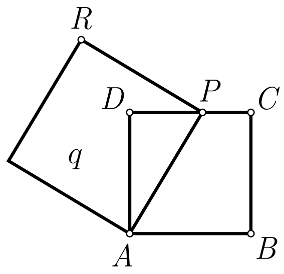
erfüllt ist und die Gleichung

$$a^e = (bd + 1)c$$

gilt. Wenn das der Fall ist, bestimme man alle Lösungstupel (a, b, c, d, e).

641212

Gegeben sei ein Quadrat $ABCD$ in der Ebene. Auf der Seite $\overline{CD}$ sei P ein beliebiger Punkt. Mit der Seite $\overline{AP}$ wird dann ein weiteres Quadrat q so gewählt, dass der Punkt B nicht im Inneren und nicht auf dem Rand von q liegt. Der in q dem Eckpunkt A diagonal gegenüberliegende Eckpunkt wird mit R bezeichnet, siehe Abbildung A 641212.



A 641212

a) Man begründe, dass es für jeden Punkt P der Strecke $\overline{CD}$ genau ein Quadrat q gibt, das die angegebenen Bedingungen erfüllt.

b) Man ermittle die Menge aller Punkte R, die auf die beschriebene Weise konstruiert werden können.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

641213

a) Es sei x eine beliebige reelle Zahl. Man beweise die Ungleichung

$$9\left(x^3+x\right) \le 2\left(x^2+x+1\right)^2 .$$

b) Es seien x und y zwei beliebige reelle Zahlen. Man beweise die Ungleichung

$$9\left(x^3y+xy^3\right) \le 2\left(x^2+xy+y^2\right)^2 .$$

641214

An einer Tafel stehen am Anfang die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 und 6. Hermine darf nun beliebig oft die folgende Operation ausführen:

Sie wischt zwei Zahlen a und b weg und schreibt dafür die beiden Zahlen $a+b$ und $2|a-b|$ hin.

Man bestimme die größte natürliche Zahl k, für die Hermine nach endlich vielen Schritten erreichen kann, dass k Nullen an der Tafel stehen.